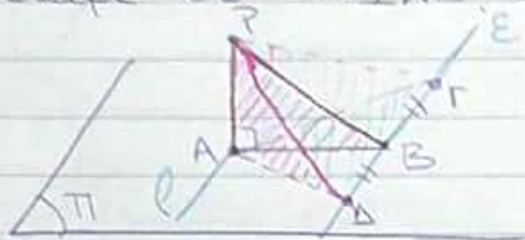


ΘΕΩΡΗΜΑ (3 κριθίων)

Έστω επίπεδο Π , επίπεδο $\mathbb{P}$ εκτός επιπέδου Π , επίπεδα $A, B \in \Pi$ και ευθεία ε η οποία διέρχεται από το B .
 Υποθέτουμε ότι $PA \perp AB$. Δεσφαίτε τις ευθείες



- i) $PA \perp \Pi$
- ii) $AB \perp \varepsilon$
- iii) $PB \perp \varepsilon$

Τότε, δύο από αυτές τις ευθείες συνεκκίνουν τον τρίτον.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

a) $[i) + (ii) \Rightarrow (iii)]$

• Δεσφαίτε επίπεδα $\Gamma, \Delta \in \varepsilon$ τέτοια ώστε $BF = BD$. Αρκεί να αποδείξω ότι $PA = PG$. Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $\triangle ABF$ η AB είναι διαμέτρος και κέντρος $\Rightarrow AD = AF$ (1)

• τώρα, $\angle PAN = \angle PAG$, αφού:

$$\begin{cases} \angle PAG = \angle PAD \stackrel{(1)}{=} \angle PAD \\ PA = \text{κοινή} \\ AD \stackrel{(1)}{=} AF \end{cases} \Rightarrow \angle PAN = \angle PAG$$

Συνεπώς

$PA = PG$ (2)

$\Rightarrow$ Τα τρίγωνα $\triangle PAB = \triangle PBF \Rightarrow \angle PBA = \angle PBF = 90^\circ$

$$\text{b) } [(i) + (ii)] \Rightarrow (iii)$$

Δεχτώ για έφελα Γ, Δ όπως στην πρώτη απόδειξη.
 Τότε, $\overset{\Delta}{PAB} = \overset{\Delta}{PBF}$, αφού:

$$\begin{cases} PB = \text{κοινή} \\ \angle PBA = \angle PBF = \text{εφεξής} \\ BA = BF \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{PA = PF} \quad (3)$$

Επίσης, $\overset{\Delta}{PAD} = \overset{\Delta}{PAF}$, αφού:

$$\begin{cases} PD = PF \quad (3) \\ PA = \text{κοινή} \\ \angle PAD = \angle PAF \quad (2) \end{cases} \text{ εφεξής.}$$

$$\Rightarrow \boxed{AD = AF} \quad (4)$$

Άρα βλέπουμε ότι $\overset{\Delta}{ABD} = \overset{\Delta}{ABF} \Rightarrow \angle ABD = \angle ABF = \text{εφεξής}$

$$\gamma) [(ii) + (iii)] \Rightarrow (i)$$

Από το Α έχουμε παραλληλότητα προς την Ε. Τότε, η $PA \perp AB$ από υπόθεση και $PA \perp \ell$, διότι $\ell \parallel E$. Άρα PA είναι
 σε δύο επίπεδα του $\pi' \Rightarrow PA \perp \pi'$

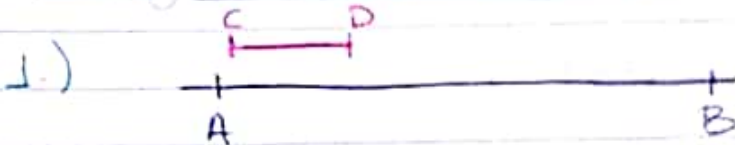
(2)

• Αξιώματα της παραλληλότητας

Για κάθε επίπεδο π , κάθε ευθεία $\ell \in \pi$ και σημείο $A \notin \ell$ με $A \neq \ell$, υπάρχει μοναδική ευθεία $\ell' \in \pi$ που είναι παράλληλη προς την ℓ .



• Αξιώματα συνευθείας



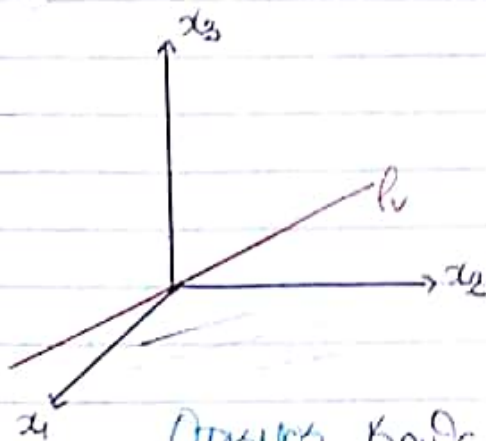
Ερωτήματα σχετικά με τα αξιώματα

1) Συμβατότητα : Δεν επιτρέπεται να αποδείξουμε ταυτόχρονα αληθεία και ψευδώς.

2) Ανεξαρτησία : Ένα αξίωμα δεν πρέπει να προκύπτει από τα άλλα.

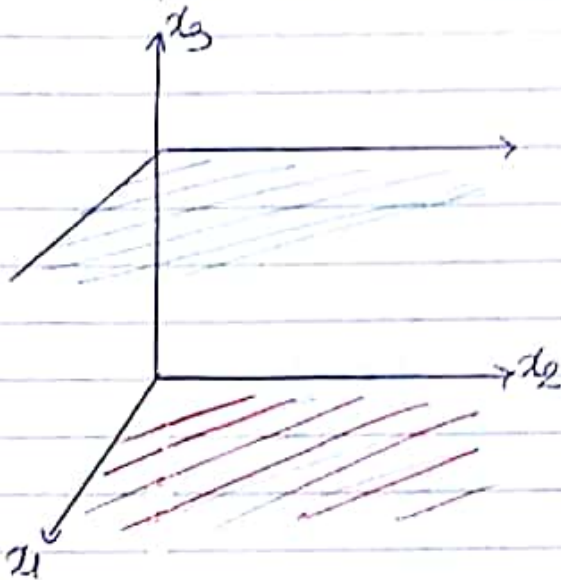
3) Πληρότητα : Ένα σύνολο αξιωμάτων λέγεται πλήρες αν προκύπτουν από αυτά όλα τα θεωρήματα.

(3)



Ζήσκους είναι να ορίσας
αξας και να ελέγας
τα αξιωματα

Ορισμός Γιατε απεικόνισα $T_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
με τύπο $T_v(P) = P + v$, απας v : σταθεροποιημένο
σηείο, λέγας παραλληλίσα μεταφορά



◀ Παρατήρησι

Εαν $v=0$, η απεικόνισα
 $T_0 = Id$.

Προτάσι -Η αντίσασ παραλληλίσα μεταφορά είναι
γαν παραλληλίσα μεταφορά ελκίως γιατε
παραλληλίσα μεταφορά T_v αναστρέφας με

$$T_v^{-1} = T_{-v}$$

ATTENTION!

Proposition $T_U \circ T_W(P) = T_U(P+W) =$

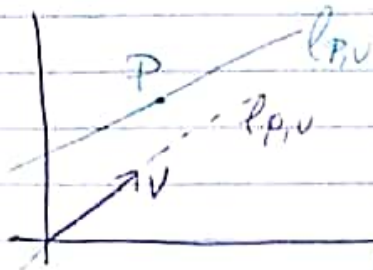
$$= P+W+U = T_U + W(P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T_U \circ T_W = T_{U+W}}$$

Exemple, $T_U \circ T_U = T_0 = \text{Id}$

$$\Rightarrow \boxed{T_U^{-1} = T_{-U}}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5 ευθείες του $\mathbb{R}^3$ ορίζεται το σύνολο των σημείων $\ell_{p,v} = \{ p + t \cdot v : t \in \mathbb{R} \}$ Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι $\ell_{p,v}$ είναι μια ευθεία που διέρχεται από το p και είναι παράλληλη προς το v .



Σημειώσεις:

(1) Οι ευθείες που διέρχονται από το $O = (0,0,0)$ είναι ανάλογες ~~εξισώσεων~~ διανυσμάτων.

2) Οι ευθείες είναι αλγεβρικές υποχώρου διαστάσεως 1 ήτοι παράλληλων μετασχηματισμών.

3) Ισχύει ότι $\ell_{p,v} = \ell_{p,\lambda v}$ για κάθε $\lambda \neq 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $p = (x_0, y_0, z_0)$ και $v = (v_1, v_2, v_3) \neq (0,0,0)$. Τότε

i) Η ευθεία $\ell_{p,v}$ είναι το σύνολο των σημείων $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
 $\Rightarrow$ άρα

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ii) Η ευθεία $\ell_{p,v}$ είναι το σύνολο των λύσεων των ανελυσμένων εξισώσεων.

$$\boxed{\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}}$$

όπου $\vec{v}$ διευθετική της εξής εξίσωσης:

Εάν κάποιο από τα v_1, v_2, v_3 μηδενίζεται τότε και η
παραπάνω εξίσωση απλοποιείται μηδενίζεται

Απόδειξη

2) Έστω $(x, y, z) \in \rho, v$. Τότε από τα ορίδια υπάρχει $t \in \mathbb{R}$
π.ω $(x, y, z) = \rho + tv = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad (1)$$

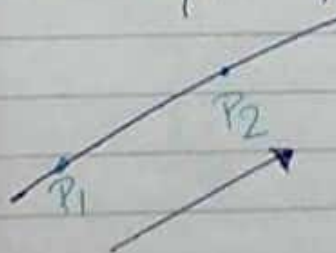
iii) Από την (1) επαίεται

$$t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: ^{v_1} ^{v_2} ^{v_3} Αν δύο διαφορετικά επίπεδα διέρχονται από αυτούς
για επίπεδα

Απόδειξη

Έστω επίπεδα $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ τα
οποία είναι διαφορετικά πρώτα τους είναι φανερό ότι η
εξίσωση $\rho, v = \{ \rho_1 + t(\rho_2 - \rho_1) \mid t \in \mathbb{R} \}$ διέρχεται από το P_1
και το P_2



Για $t=0$ βλέπουμε ότι $P \in \ell_{P,U}$ και για $t=1$ βλέπουμε $P_2 \in \ell_{P,U}$ να δείξουμε ότι είναι η ευθεία που αναζητούμε. Ας υποθέσουμε ότι $\ell_{P,U}$ είναι η ευθεία που διέρχεται από τα P_1, P_2 . Τότε υπάρχουν $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$P_1 = P_0 + t_1 U \quad (1)$$

$$P_2 = P_0 + t_2 U \quad (2)$$

Συμμερίζοντας, από (1), (2): $P_2 - P_1 = U(t_2 - t_1) \quad (3)$

Άρα $U \parallel P_2 - P_1$ και συνεπώς $\ell_{P,U} = \ell_{P,P_2-P_1}$

1/ ΑΡΑΔΕΙΞΝΑ

1.) Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $P_1 = (1, 2, 3)$ και $P_2 = (4, 2, 7)$

$$\frac{1 \times 2 \times 1}{2}$$

~ Η ευθεία που ενώνει τα P_1, P_2 είναι η:

$$\ell_{P_1, P_2-P_1} = \{P_1 + t(P_2 - P_1), t \in \mathbb{R}\}$$

Άρα οι παραμετρικές εξισώσεις θα είναι

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 0t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

~ Οι αναλλοίητες εξισώσεις είναι $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{4}$

Ισοδυναμία :

$$\left| \frac{x-1}{3} = \frac{x-3}{4} \text{ και } y=2 \right|$$

Ορισμός

Os επιπέδα ορίζουμε τα σύνολα της μορφής

$\Pi_{P,v,w} = \{ p + tv + sw : t, s \in \mathbb{R} \}$, όπου v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το $\Pi_{P,v,w}$ είναι το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο P και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα v, w .